

MATEMATIKA 2

Lekcija 5- Rektifikacija krive. Komplanacija obrtne površi.

Dužina proste krive. Neka je C jedna prosta kriva zadata parametarskim jednačinama:

$$C : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (1)$$

orijentisana u smeru porasta parametra t . Ako je $A_0 = M(\alpha)$, $A_n = M(\beta)$, i ako su A_1, A_2, \dots, A_{n-1} neke tačke na krivoj C takve da je $A_0 \prec A_1 \prec A_2 \prec \dots \prec A_n$, tada kažemo da je izlomljena linija L sa temenima $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ upisana u krivu C . Obeležimo sa l_i dužinu stranice $A_i A_{i+1}$ izlomljene linije L , tj. $l_i := |A_i A_{i+1}|$, za $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, sa $\underset{\sim}{s}(L)$ dužinu izlomljene linije L , tj. $\underset{\sim}{s}(L) := \sum_{i=0}^{n-1} l_i$, i sa d_i dijametar luka $A_i \overset{\frown}{A}_{i+1}$ krive C , tj. $d_i := d(A_i \overset{\frown}{A}_{i+1})$, za $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. (Dijametar figure je supremum rastojanja proizvoljnih dveju tačaka te figure. Uobičajena oznaka dijametara figure F je $d(F)$.) Najveću od dužina l_i obeležimo sa $\lambda^*(L)$, tj. stavimo $\lambda^*(L) := \max_{0 \leq i \leq n-1} l_i$, a najveći od dijametara d_i obeležimo sa $\delta(L)$, tj. stavimo $\delta(L) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d_i$.

Definicije: Ako za prostu krivu C zadatu parametarskim jednačinama (1) postoji granična vrednost

$$\lim_{\delta(L) \rightarrow 0} \underset{\sim}{s}(L) \quad (2)$$

(gde je L proizvoljna izlomljena linija upisana u krivu C), tada se kaže da je kriva C rektifikabilna, ili da ima dužinu, i ta granična vrednost se naziva dužinom krive C . Oznaka $\text{— } s(C)$.

Navešćemo još neke definicije dužine proste krive, međusobno ekvivalentne.

Ako je izlomljena linija $L = A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ upisana u prostu krivu C zadatu parametarskim jednačinama (1), tada postoje jedinstvene tačke t_0, t_1, \dots, t_n segmenta $[\alpha, \beta]$ za koje je $A_i = M(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Tada je $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ i tačke $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ čine jednu podelu Π segmenta $[\alpha, \beta]$: $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\} = \Pi$. Ako se u navedenoj definiciji dužine proste krive $\delta(L)$ zameni dijametrom $\lambda(\Pi)$ podele Π , a sve ostalo ostane nepromenjeno, dobije se druga definicija dužine proste krive, ekvivalentna prvobitnoj. Ako je C nezatvorena prosta kriva, onda se zamenjivanjem $\delta(L)$ sa $\lambda^*(L)$ može dobiti još jedna ekvivalentna definicija.

Najzad, zamenivši graničnu vrednost (2) supremumom dužina $s(L)$ izlomljenih linija L upisanih u krivu C , dobićemo takodje jednu definiciju dužine proste krive, ekvivalentnu prvobitnoj.

Svojstva: Dužina proste krive ima sledeća osnovna svojstva. 1^0 (Pozitivnost.) Ako je prosta kriva C rektifikabilna, onda je $s(C) > 0$. 2^0 (Aditivnost.) Ako je prosta kriva nekom tačkom $A_1 \in C$ podeljena na krive C_1 i C_2 , tada iz rektifikabilnosti C sledi rektifikabilnost C_1 i C_2 , i obrnuto, iz rektifikabilnosti C_1 i C_2 sledi rektifikabilnost C , i važi $s(C) = s(C_1) + s(C_2)$. (Bez dokaza.)

Egzistencija: Ako je prosta kriva C zadata parametarskim jednačinama (1) i pritom su funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidno diferencijabilne, tada je C rektifikabilna kriva.

Dokazaćemo ovu teoremu, i to tako što ćemo pokazati da je skup dužina izlomljenih linija upisanih u krivu C ograničen odozgo. Neka je $L = A_0A_1A_2 \dots A_n$ jedna izlomljena linija sa temenima $A_i = M(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ($t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$), upisana u krivu C . Primenom Lagranžove teoreme zaključujemo da za svako $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, postoje tačke τ_i , $\overline{\tau}_i$, $\tilde{\tau}_i$ u intervalu (t_i, t_{i+1}) takve da je $\Delta x_i := x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)\Delta t_i$, $\Delta y_i := y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i$, $\Delta z_i := z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i$ ($\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$). Obeležimo sa M (\overline{M}) (\widetilde{M}) najveću vrednost $|x'(t)|$ ($|y'(t)|$) ($|z'(t)|$) na segmentu $[\alpha, \beta]$. Tada je

$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \leq \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} \Delta t_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

pa je

$$s(L) \leq \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} (\beta - \alpha).$$

Kako je ovde L proizvoljna izlomljena linija upisana u krivu C , to postoji supremum dužina izlomljenih linija upisanih u krivu C , tj. postoji $s(C)$.

U ovom dokazu usput smo dobili i sledeću ocenu odozgo dužine krive C :

$$s(C) \leq \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} (\beta - \alpha). \quad (3)$$

Na isti način se može izvesti i ocena odozdo:

$$s(C) \geq \sqrt{m^2 + \overline{m}^2 + \widetilde{m}^2} (\beta - \alpha), \quad (4)$$

gde je m (\overline{m}) (\widetilde{m}) najmanja vrednost $|x'(t)|$ ($|y'(t)|$) ($|z'(t)|$) na segmentu $[\alpha, \beta]$.

Diferencijal luka: Pretpostavimo da je prosta kriva C , zadata parametarskim jednačinama (1), rektifikabilna. Za svaki $t \in (\alpha, \beta)$, označimo sa C_t luk $\widetilde{M(\alpha)M(t)}$ krive C . Svaka kriva C_t je rektifikabilna, jer je C rektifikabilna i tačka $M(t)$ deli krivu C na C_t i još jednu krivu. Obeležimo dužinu krive C_t sa $s(t)$, stavimo $s(\alpha) := 0$ i $s(\beta) := s(C)$, i razmotrimo funkciju $s = s(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pokazaćemo da je

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (5)$$

pri čemu pod $s'(\alpha)$ treba podrazumevati $s'_+(\alpha)$, a pod $s'(\beta) - s'_-(\beta)$.

Neka je $t \in [\alpha, \beta]$. Ako je $t \neq \beta$ i $\Delta t > 0$, $t + \Delta t < \beta$, onda može da se govori o luku $\widetilde{M(t)M(t + \Delta t)}$ krive C . Na osnovu svojstva aditivnosti dužine proste krive, priraštaj $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ je jednak $s\left(\widetilde{M(t)M(t + \Delta t)}\right)$.

Primenimo ocene (3) i (4) na krivu $\widetilde{M(t)M(t + \Delta t)}$:

$$\sqrt{m^2 + \overline{m}^2 + \widetilde{m}^2} \Delta t \leq s\left(\widetilde{M(t)M(t + \Delta t)}\right) \leq \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} \Delta t,$$

pri čemu je M (\overline{M}) (\widetilde{M}) najveća vrednost, a m (\overline{m}) (\widetilde{m}) najmanja vrednost $|x'|$ ($|y'|$) ($|z'|$) na segmentu $[t, t + \Delta t]$. Sledi da je

$$\sqrt{m^2 + \overline{m}^2 + \widetilde{m}^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2}.$$

Lako je videti (na skoro isti način) da isto važi i za $\Delta t < 0$, $t + \Delta t > \alpha$, ako je $t \in (\alpha, \beta]$. Kako je

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{m^2 + \overline{m}^2 + \widetilde{m}^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

i

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{M^2 + \overline{M}^2 + \widetilde{M}^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

to je i

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Tako smo pokazali da zaista važi (5).

Diferencijal $ds = ds(t, \Delta t)$ funkcije $s = s(t)$ naziva se diferencijalom dužine luka ili, skraćeno, diferencijalom luka. Množenjem jednakosti (5) sa Δt i kvadriranjem, dobija se formula za diferencijal luka

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6)$$

U slučaju kad je C ravna kriva, formula (6) glasi $ds^2 = dx^2 + dy^2$, i može se geometrijski interpretirati na sledeći način. Obeležimo tačke $(x(t), y(t))$, $(x(t+dt), y(t+dt))$ i $(x(t+dt), y(t))$, redom, sa M , M_1 i N . Ove tačke čine temena "krivolinijskog pravouglog trougla", čija "hipotenuza" je luk $\widehat{MM_1}$ krive C , a "katete" su mu duži MN i M_1N . (Karakteristični trougao, ili Lajbnicov trougao.) Ako je $x(t+dt) > x(t)$ i $y(t+dt) > y(t)$, tada dužine "kateta" iznose Δx i Δy , a dužina "hipotenuze" je Δs . Formula $ds^2 = dx^2 + dy^2$ pokazuje da važi svojevrsna "Pitagorina teorema", mada ne baš za priraštaje Δx , Δy , Δz , već za njihove glavne delove.

U slučaju ravne krive formula (5) glasi

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}.$$

Specijalno, ako je ravna kriva C zadata jednačinom oblika $y = y(t)$, ova formula se svodi na

$$s'_t = \sqrt{1 + y_x'^2}.$$

Slučaj kad je ravna kriva C zadata jednačinom u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, svodi se na slučaj zadavanja parametarskim jednačinama, sa polarnim uglom φ u ulozi parametra:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Kako je tada

$$x'_\varphi = r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad y'_\varphi = r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi,$$

to je

$$x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 = r_\varphi'^2 + r^2, \tag{7}$$

pa je

$$s_\varphi'^2 = \sqrt{r_\varphi'^2 + r^2}.$$

Luk u ulozi parametra: Kako je funkcija $s = s(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, strogo rastuća, to ona ima inverznu funkciju $t = t(s)$, $s \in [0, S]$, (gde je stavljeno $s(\beta) =: S$). Ako se u jednačinama (1) umesto t napiše $t(s)$, dobiju se parametarske jednačine krive C u kojima je promenljivi luk s (tj. promenljiva dužina luka) u ulozi parametra:

$$C : x = X(s), \quad y = Y(s), \quad z = Z(s), \quad s \in [0, S], \tag{8}$$

gde je $X(s) = x(t(s))$, $Y(s) = y(t(s))$, $Z(s) = z(t(s))$. Ako su funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidno diferencijabilne i $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$, tada su i

funkcije $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ neprekidno diferencijabilne i važi $X'(s)^2 + Y'(s)^2 + Z'(s)^2 \neq 0$. (Sagledati samostalno, koristeći formulu (5).) (Dakle, od glatke parametrizacije (1) krive C dobija se takodje glatka parametrizacija (8) iste krive.)

Teorema o izračunavanju dužine glatke krive: Neka je C jedna prosta kriva zadata parametrarskim jednačinama (1) i neka su pritom funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidno diferencijabilne. Tada je kriva C rektifikabilna i važi

$$s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (9)$$

Dokaz. Rektifikabilnost krive C pod navedenim pretpostavkama ustanovljena je ranije, u teoremi o egzistenciji dužine proste krive. Formula (9) može se dobiti na osnovu (5). Prema (5), integrand u integralu na desnoj strani jednakosti (9) je jednak izvodnoj funkciji funkcije $s = s(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pa je integral jednak priraštaju ove funkcije na segmentu $[\alpha, \beta]$ (Njutn-Lajbnicova formula):

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t) dt = s(t)|_{\alpha}^{\beta} = s(\beta) - s(\alpha).$$

Ostaje još samo da se uzme u obzir da je $s(\beta) = s(C)$ i $s(\alpha) = 0$.

Jasno je da u slučaju ravne krive C formula (9) glasi

$$s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Specijalno, ako je ravna kriva C zadata jednačinom oblika $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, ova formula se svodi na sledeću:

$$s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Najzad, dužina proste ravne krive C zadate jednačinom u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, gde je funkcija $r(\varphi)$ neprekidno diferencijabilna, računa se po formuli

$$s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi.$$

Ova formula se dobije iz formule (9) kad se za parametar uzme polarni ugao φ , s obzirom na jednakost (7).

Svaka od navedenih formula za dužinu krive može da se napiše u obliku

$$s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} ds$$

(ds — diferencijal luka).

Primer 1. Odredimo dužinu svake od krivih:

(a) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 10$, $x \in [8, 27]$;

(b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, ($a > 0$) (astroida);

(c) $r = a(1 + \cos \varphi)$, ($a > 0$) (kardioida).

Rešenje.

(a) Kako je $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}}$, to je tražena dužina krive jednaka

$$s = \int_8^{27} \sqrt{1 + \left(2x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{4 + x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Poslednji integral se izračunava smenom $t = x^{\frac{2}{3}} + 4$, $dt = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx$, pri čemu je za $x = 8$, $t = 8$, a za $x = 27$, $t = 13$. Tako se dobija

$$s = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{t} dt = t^{\frac{3}{2}} \Big|_8^{13} = \sqrt{13^3} - \sqrt{8^3} \approx 24.245.$$

(b) Prelaskom na parametarske jednačine astroide:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

uzimajući u obzir njenu simetričnost u odnosu na koordinatne ose, nalazimo

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = \\ &= 6a \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

(c) Kriva je simetrična u odnosu na pravu $r \sin \varphi = 0$, pa je njena dužina jrdnaka dvostruko dužini njenog luka od tačke $\varphi = 0$, $r = 2a$, do tačke $r = 0$. Kako je

$$r'(\varphi) = -a \sin \varphi, \quad r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

to je

$$s = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Površina obrtne površi. Svaku površ koja nastaje obrtanjem (za pun ugao) neke ravne krive oko neke ose u istoj ravni u kojoj je ta kriva, nazivamo obrtnom površi. Pri definisanju površine obrtne površi smatramo da je površina obrtne površi koja nastaje obrtanjem duži oko neke ose, pri čemu su duž i osa u istoj ravni, već definisana. Takva obrtna površ predstavlja omotač neke zarubljene kupe (ako duž i osa nemaju zajedničkih tačaka i nisu paralelne) ili omotač nekog valjka (ako su duž i osa paralelne) ili omotač neke kupe (ako je jedan kraj duži jedina zajednička tačka duži i ose) ili unija omotača dveju kupa (ako je neka unutrašnja tačka duži jedina zajednička tačka duži i ose). Površina površi koja nastaje obrtanjem ravne izlomljene linije oko neke ose u istoj ravni u kojoj je ta izlomljena linija definišemo kao zbir površina površi koje nastaju obrtanjem stranica izlomljene linije oko iste ose.

Definicije: Neka je C jedna prosta kriva u nekoj ravni α i s neka osa u istoj ravni. Neka su sve tačke krive C s iste strane ose s ili na osi. Pretpostavimo da obrtanjem krive C oko ose s nastaje neka površ Γ . Ako je L neka izlomljena linija upisana u krivu C , obeležimo sa Λ površ koja nastaje obrtanjem linije L oko ose s , a sa $P(\Lambda)$ površinu površi Λ . Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\delta(L) \rightarrow 0} P(\Lambda),$$

(gde je L proizvoljna izlomljena linija upisana u krivu C), onda kažemo da obrtna površ Γ ima površinu, ili da je merljiva, i tu graničnu vrednost nazivamo površinom površi Γ . Oznaka — $P(\Gamma)$.

Ako je kriva C (i osa s) u ravni Oxy i zadata je parametarskim jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, tada se u ovoj definiciji $\delta(L)$ može zameniti sa $\lambda(\Pi)$, gde je Π podela segmenta $[\alpha, \beta]$ određena izlomljenom linijom L , i tako dobiti nešto drugačija definicija koja je ekvivalentna prvobitnoj. U slučaju nezatvorene krive C , zamenivši u navedenoj definiciji $\delta(L)$

sa $\lambda^*(L)$ dobićemo još jednu definiciju površine obrtne površi, ekvivalentnu prvobitnoj.

Teorema o izračunavanju površine obrtne površi: Neka je

$$C : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

jedna prosta kriva u ravni Oxy , neka je pritom $y(t) \geq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$, i neka obrtanjem krive C oko x -ose nastaje jedna površ Γ . Ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ neprekidno diferencijabilne, tada površ Γ ima površinu i važi

$$P(\Gamma) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (10)$$

(Dokaz — na vežbama AG.)

Specijalno, ako je kriva C u ravni Oxy zadata jednačinom oblika $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je funkcija $y(x)$ neprekidno diferencijabilna, i $y(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$, formula (10) svodi se na sledeću:

$$P(\Gamma) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (11)$$

U slučaju kad je kriva C u $r\varphi$ -ravni zadata jednačinom u polarnim koordinatama:

$$C : r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

gde je $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, površina površi Γ koja nastaje obrtanjem krive C oko polarne ose računa se po formuli

$$P(\Gamma) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi, \quad (12)$$

pod pretpostavkom da je funkcija $r(\varphi)$ neprekidno diferencijabilna. Ova formula može da se dobije iz (10) tako što se za parametar uzme polarni ugao φ .

Svaka od formula (10), (11), (12) može da se napiše u obliku

$$P(\Gamma) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds$$

(ds – diferencijal luka krive).

Primer 2. Nađimo površinu P površi koja nastaje obrtanjem krive

(a) $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, oko x -ose;

- (b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) (astroida), oko x -ose;
 (c) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, ($a > 0$) (lemniskata) oko polarne ose.

Rešenje.

(a) Prema formuli (11) je:

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \cdot \sqrt{(1 + \tan^2 x)^2 + 1}}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{(1 + \tan^2 x)^2 + 1}}{1 + \tan^2 x} d(1 + \tan^2 x) = \pi \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + z^2}}{z} dz \\
 &= \pi \int_1^2 \frac{(1 + z^2) dz}{z \sqrt{1 + z^2}} = \pi \left(\int_1^2 \frac{dz}{z^2 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} + \int_1^2 \frac{z dz}{\sqrt{1 + z^2}} \right) \\
 &= \pi \left(\int_2^1 \frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} + \sqrt{1 + z^2} \Big|_1^2 \right) = \pi \left[\ln \left(\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right) \Big|_2^1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} \right] \\
 &= \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)}{2} \right].
 \end{aligned}$$

(b) Kako su parametarske jednačine asteroide: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), to, uzimajući u obzir simetričnost krive u odnosu na obe koordinatne ose, po formuli (10) računamo

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
 &= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) \\
 &= \frac{12}{5} \pi a^2 \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

(c) Prema formuli (12), s obzirom na simetričnost lemniskate, ovde je

$$P = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi.$$

Kako je

$$r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad r'(\varphi) = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

i

$$r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi},$$

to je

$$P = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2 \cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$